Kapitel II Flächentheorie

§ 1 Beschreibung parametrisierter Flächen – Grundbegriffe

Die Theorie differenzierbarer Kurven fasst die Kurven als Abbildungen $\alpha : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ auf. Wir übertragen diesen Standpunkt sinngemäß auf Flächen und betrachten zunächst global parametrisierte Flächen. Später erweitern wir diese Vorstellung und definieren Flächen als Punktmengen in $\mathbb{R}^3$, die lokal parametrisiert werden können.

<u>Definition</u>: parametrisierte Fläche

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen.

a) Eine (beliebig oft) differenzierbare Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ heißt <u>parametrisiertes Flächenstück</u> bzw. <u>Fläche</u>, falls gilt: 1.) Für alle $(u, v) \in \Omega$

hat die Ableitung $DX(u,v): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ maximalen Rang $(=2)$. 2.) X ist injektiv und $X^{-1}: X(\Omega) \to \Omega$ ist stetig.

b) Der Untervektorraum $DX(u,v)(\mathbb{R}^2)$ heißt in diesem Fall Tangentialebene an X in (u,v), seine Elemente heißen Tangentenvektoren an X in (u,v).

Bemerkungen: 1.) $DX(u,v)$ wird repräsentiert durch die Matrix $(X_u \; X_v)(u,v)$ mit den Vektoren $X_u := \frac{\partial}{\partial u} X$ und $X_v := \frac{\partial}{\partial v} X$. Die Rangbedingung besagt, daß diese an jeder (u,v) des Parametergebiets Ω linear unabhängig sind. Man schreibt

$$T_{(u,v)} X$$

für die Tangentialebene und hat die Darstellung

$$T_{(u,v)} X = \{\lambda X_u(u,v) + \mu X_v(u,v) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

2.) Sei (u_0, v_0) fixiert in Ω, $\xi := X(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^3$.

Man setzt:

$$\tilde{T}_{(u_0,v_0)} X := \{\alpha'(0) : \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3 \text{ Kurve mit } \operatorname{Spur} \alpha \subset X(\Omega),\ \alpha(0) = \xi\},$$

d.h. man betrachtet die Tangentenvektoren an Kurven mit Spur in Ω durch ξ. Sei $\beta_i(t) := (u_0, v_0) + t e_i$, $i = 1, 2$: Dann ist $\alpha_i(t) := X(\beta_i(t))$ eine solche Kurve mit $\alpha_i'(0) = \partial_i X(u_0, v_0)$, so dass $X_u(u_0,v_0)$; $X_v(u_0,v_0)$ zu $\tilde{T}_{(u_0,v_0)} X$ gehören. Genauso sieht man $(\beta(t) := (u_0,v_0) + t\lambda e_1 + t\mu e_2)$, dass $\lambda X_u(u_0,v_0) + \mu X_v(u_0,v_0) \in \tilde{T}_{(u_0,v_0)} X$ ist. Es folgt $TX \subset \tilde{T}X$. Sei umgekehrt $\alpha'(0) \in \tilde{T}_{(u_0,v_0)} X$. Man setzt $\beta := X^{-1}(\alpha)$. Dann ist $\beta'(0) = \lambda e_1 + \mu e_2$, und aus $\alpha = X \circ \beta$ folgt $\alpha'(0) = DX(u_0,v_0)(\beta'(0))$

$= \lambda \, X_u(u_0, v_0) + \mu \, X_v(u_0, v_0)$, womit $\alpha'(0) \in T_{(u_0,v_0)} X$ bewiesen ist. Insgesamt ist gezeigt: $T_{(u_0,v_0)} X = \tilde{T}_{(u_0,v_0)} X$.

3.) Der Satz über die inverse Abbildung liefert bei entsprechender Anwendung [vgl. Do Carmo, Prop. 2; p. 79], daß $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ alleine mit a) 1.) zumindest <u>lokal</u> injektiv ist und <u>lokal</u> eine stetige Inverse hat. Das bedeutet nicht die globale Injektivität von X, die Fläche kann Selbstdurchschneidungen haben, was wir mit a) 2.) ausschließen.

<u>Beispiele:</u> 1.) <u>(parametrisierte Ebene)</u>

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ und $X : \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto C + uA + vB$.

Dann ist $DX(u,v) = (A\,B)$, also: $Rg\, DX(u,v) = Rg\,(A\,B)$, und der Rang ist maximal genau dann, wenn A und B linear unabhängig sind.

Nehmen wir dies an, so ist X natürlich injektiv, also eine parametrisierte Fläche. Offenbar gilt:

$$\text{Bild}(X) = \{uA + vB + C : u, v \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{affine Hyperebene durch } C.$$

An jeder Stelle (u,v) ist dagegen

$$T_{(u,v)} X = \{\lambda A + \mu B : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

denn Tangentialebenen gehen per Definition immer durch $0 \in \mathbb{R}^3$. Hier ist die Tangentialebene die in den Ursprung verschobene affine Ebene $X(\mathbb{R}^2)$.

2.) (<u>parametrisierte Graphen</u>)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir definieren die <u>Graphenabbildung</u>

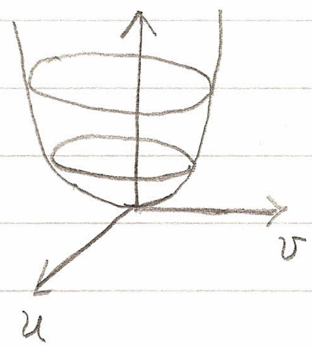
$$X : \Omega \ni (u,v) \mapsto (u, v, f(u,v)).$$

Dann ist X eine parametrisierte Fläche im Sinne der

Definition: Differenzierbarkeit und Injektivität sind klar. Weiter ist $X_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}), X_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$, so dass X_u, X_v überall l.u. sind. Für die Tangentialebene gilt

$$T_{(u,v)}X = \{\lambda(1,0,\frac{\partial f}{\partial u}) + \mu(0,1,\frac{\partial f}{\partial v}) : \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(\lambda, \mu, \lambda\frac{\partial f}{\partial u} + \mu\frac{\partial f}{\partial v}) : \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}.$$

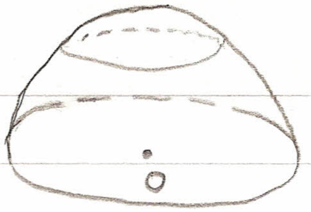
Konkret: a) (Parabel) Sei $f(u,v) := u^2+v^2$, $X(u,v) := (u, v, u^2+v^2)$. Es ist



$$DX(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

und $T_{(u,v)}X = \{(\lambda, \mu, 2\lambda u + 2\mu v) : \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$

b) (obere Halbsphäre) Mit $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 < 1\}$ sei $f(u,v) := \sqrt{1-u^2-v^2}$, $(u,v) \in \Omega$. Dann ist das Bild von $X(u,v) := (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$ die obere



Halbsphäre in $\mathbb{R}^3$. Es gilt

$$X_u = (1, 0, -u/\sqrt{1-u^2-v^2}),$$

$$X_v = (0, 1, -v/\sqrt{1-u^2-v^2}).$$

Speziell folgt $T_{(0,0)}X = \{(\lambda, \mu, 0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

<u>Definition:</u> (<u>Umparametrisierung</u>)

Sei $X: \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Ist $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi: \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus, so heißt $\tilde{X}: \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{X} := X \circ \varphi$, <u>die mit φ umparametrisierte Fläche</u>. Ist $\det D\varphi > 0$, so heißt die Umparametrisierung <u>orientierungstreu</u>.

<u>Beispiel:</u> $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u^2 + v^2 < 1\}$, $\tilde{\Omega} :=$ $\{(r, \theta) : 0 < r < 1,\ \theta \in [0, 2\pi)\}$, $\varphi(r, \theta) :=$ $r(\cos\theta, \sin\theta) = r e^{i\theta}$ (Polarkoordinaten)

<u>Definition</u> : Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $V : \Omega \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar.

i) Das Vektorfeld V heißt <u>tangential längs einer Fläche</u> $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$, falls gilt:

$$V(u,v) \in T_{(u,v)} X \quad \forall (u,v) \in \Omega$$

ii) Das Feld V wird <u>normal längs der Fläche X</u> genannt, falls

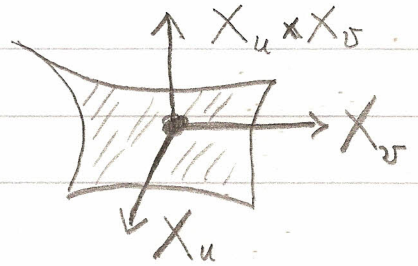
$$V(u,v) \in \left(T_{(u,v)} X\right)^{\perp} \quad \forall (u,v) \in \Omega \iff$$

$$V(u,v) \cdot W = 0 \quad \forall (u,v) \in \Omega, \ \forall W \in T_{(u,v)} X.$$

<u>Kanonisches Beispiel:</u> $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ Fläche $\Longrightarrow$

$X_u, X_v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ tangentiale Felder längs X,

$X_u \times X_v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ normales Feld längs X.



beachte: $X_u \times X_v \neq 0$, da X_u, X_v l.u.!

Alle tangentialen VF (= Vektorfelder) längs der Fläche X lassen sich aus X_u, X_v linear kombinieren, genauer:

<u>Satz 1:</u> Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, V sei <u>tangentiales</u> VF längs X. Dann gibt es differenzierbare Funktionen $\alpha, \beta : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$* \quad V(u,v) = \alpha(u,v) X_u(u,v) + \beta(u,v) X_v(u,v), \ (u,v) \in \Omega.$$

Sind umgekehrt α, β differenzierbar auf Ω, so wird durch $*$ ein tangentiales VF längs X definiert.

Beweis: Die "umgekehrt" Aussage ist klar!

Sei $V : \Omega \to \mathbb{R}^3$ also tangential V.F. längs X.

Da X_u und X_v l.u. sind und $T_{(u,v)}X$ an jeder

Stelle $(u,v) \in \Omega$ aufspannen, folgt, dass es eindeutig bestimmte Funktionen $\alpha, \beta : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $*$ gibt. Um deren Differenzierbarkeit zu beweisen, leiten wir Formeln für α, β ab, wobei die Stelle (u,v) fortgelassen wird:

Aus $*$ folgt (Skalarprodukt mit X_u und X_v)

$$\alpha\, X_u \cdot X_u + \beta\, X_u \cdot X_v = V \cdot X_u,$$

$$\alpha\, X_u \cdot X_v + \beta\, X_v \cdot X_v = V \cdot X_v .$$

Historische Symbolik: (nach Gauß)

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{E} := \mathcal{E}(u,v) := |X_u|^2 , \quad \mathcal{F} := \mathcal{F}(u,v) = X_u \cdot X_v , \\ \mathcal{G} := \mathcal{G}(u,v) := |X_v|^2 \end{array}}$$

Damit schreiben sich obige Gleichungen als

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\, \mathcal{E} + \beta\, \mathcal{F} = V \cdot X_u , \\ \alpha\, \mathcal{F} + \beta\, \mathcal{G} = V \cdot X_v \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \cdot X_u \\ V \cdot X_v \end{pmatrix}$$

Die (2×2) - Matrix ist regulär, denn

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix} = \mathcal{E}\mathcal{G} - |\mathcal{F}|^2 =$$

$$|X_u|^2 |X_v|^2 - (X_u \cdot X_v)^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0,$$

da X_u, X_v l. u. Man kann also auflösen mit

dem Ergebnis

$$** \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \begin{pmatrix} \mathcal{G} & -\mathcal{F} \\ -\mathcal{F} & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \cdot X_u \\ V \cdot X_v \end{pmatrix}.$$

An dieser Darstellung von α, β liest man die Differenzierbarkeit von α, β sofort ab, denn die rechte Seite von ** hängt differenzierbar von (u,v) ab.

$\square$

Für Flächen $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sind die 3 Vektoren

$X_u, X_v, X_u \times X_v$ wichtig, denn sie beschreiben